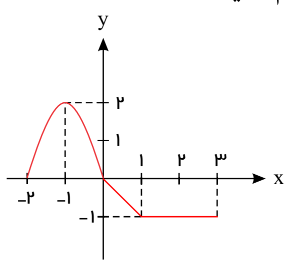
تاریخ : وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی : تعداد سوالات:۲۰

مرکز مشاوره‌دکتر فاطمه السادات ارشی

موضوع ریاضی (۳) -دوازدهم) ❊ دوازدهم:فصل اول: تابع،فصل دوم: مثلثات،فصل سوم: حد،فصل چهارم: مشتق)

۱. نمودار تابع $y=f(-۲x)$ به‌صورت مقابل است، نمودار تابع $y=-۲f(x-۲)$ را رسم کنید.



۲. نمودار تابع $y=۲^{x}+۱$ را رسم کنید.

۳. نمودار تابع $y=۲\cos(\frac{۱}{۲}x)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

۴. تابع $f(x)=x+۴$ را با دامنه $D_f=[-۴,۰]$ رسم کرده و سپس توابع $f(۲x)$ و $f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.

۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^{3}+x^{2}-6$ بر $x+2$ را بیابید.

۶. m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^{4}-3x^{3}+mx+n$ بر $x^{2}-5x+6$ بخش‌پذیر باشد.

۷. m و n را چنان بیابید که $f(x)=x^{3}+mx-n$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ آن بر $x+2$ برابر -3 باشد.

۸. معادله $\sin(\frac{x}{2})+\cos(\frac{x}{2})=0$ در فاصله $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۹. دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $g(x)=\pi\cos(\frac{\pi}{2}x)+\frac{\pi}{2}$

الف) $f(x)=\sqrt{3}\sin(2\pi x)-1$

۱۰. معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\tan x = ۳ \cot x$

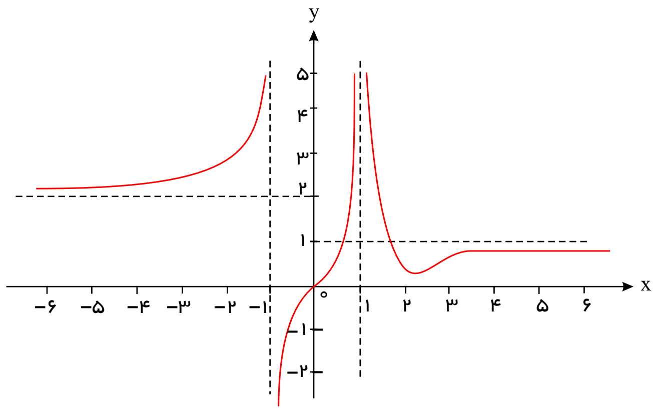
ب) $۲ \sin^۲ x = ۳ \cos x$

۱۱. اگر دورهٔ تناوب $f(x) = ۳\cos(mx) + ۴$ برابر با $\frac{\pi}{۵}$ باشد، دورهٔ تناوب تابع $g(x) = -\cos(m+۲)x$ را بیابید. ($m > ۰$)

۱۲. نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۱۰$ بر دوجمله‌ای $x + ۲$ بخش‌پذیر است.

۱۳. الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-۱) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

۱۴. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

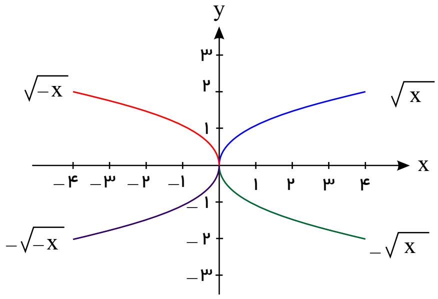
ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

۱۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

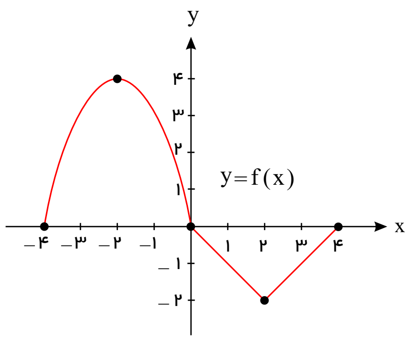
$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & x<-4 \\ 3 & -4\le x<2 \\ 3x-2 & x\ge 2 \end{cases}$$

۱۶. تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

۱۷. نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

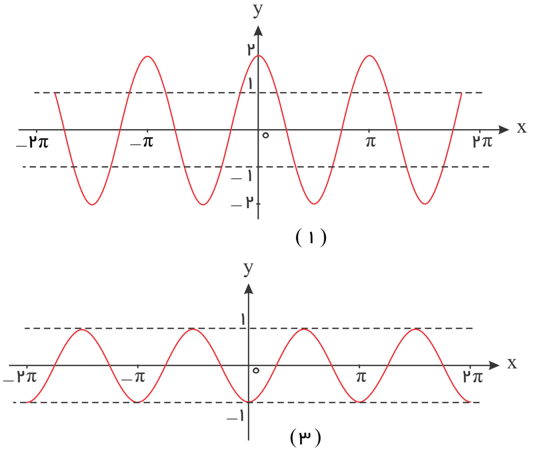


۱۸. نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.



x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰

۱۹. با استفاده از نمودار $y = \cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید.

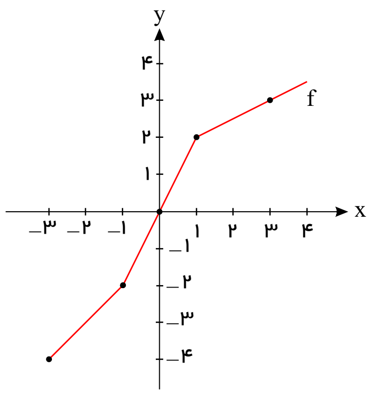


الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y = ۲\cos ۲x$ پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$

ت) $y = -\cos ۲x$

۲۰. از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

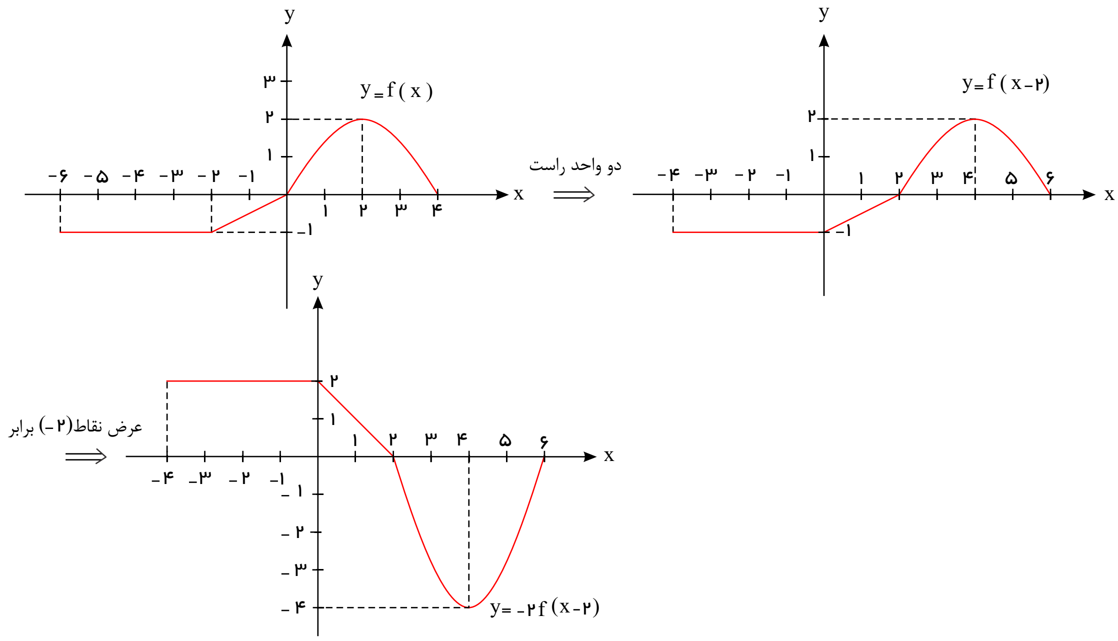


تاریخ :　　　　　　　　　　　　　وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :　　　　　　　　　　تعداد سوالات: ۲۰

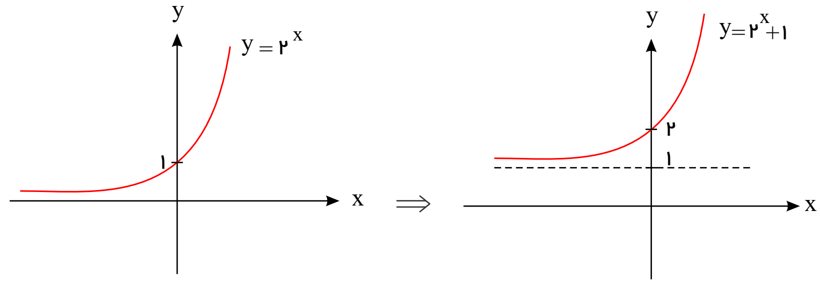
موضوع ریاضی)۳(-دوازدهم) * دوازدهم:فصل اول: تابع،فصل دوم: مثلثات،فصل سوم: حد،فصل چهارم: مشتق(　　　مرکز مشاوره دکتر فاطمه السادات ارشی

۱. با توجه به این که برای رسم $y=f(-2x)$ باید در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر -2 تقسیم کنیم، حال برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(-2x)$ باید در نمودار $y=f(-2x)$ طول نقاط را در -2 ضرب کنیم.



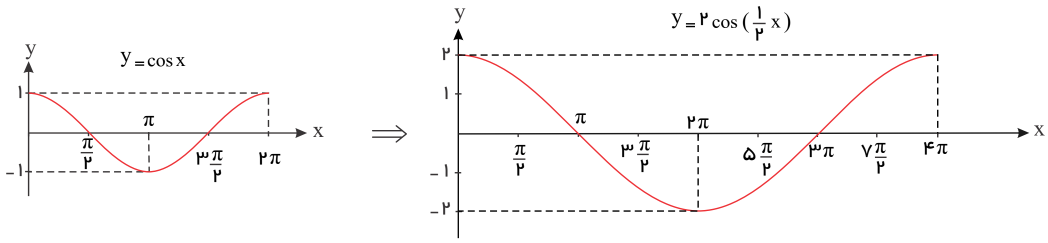
-سخت

۲. برای رسم $y=2^x+1$ باید نمودار $y=2^x$ را یک واحد بالا ببریم.



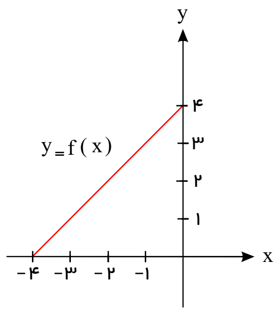
-آسان

۳. برای رسم $y=2\cos(\frac{1}{2}x)$، در نمودار $y=\cos x$ باید طول نقاط را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم (در ۲ ضرب کنیم) و عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.

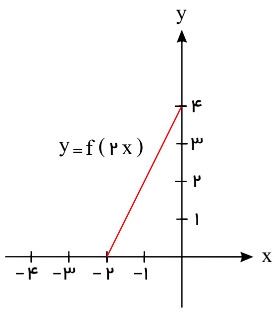


-متوسط

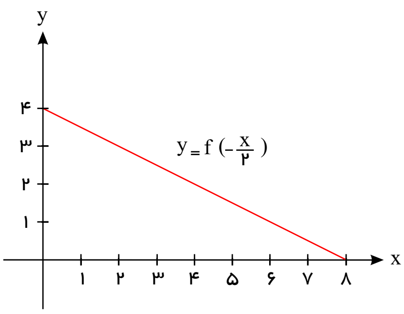
.۴



$f(x)=x+۴ \quad \begin{vmatrix} x=-۴ \\ y=۰ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x=۰ \\ y=۴ \end{vmatrix}$



برای رسم $y=f(۲x)$ باید در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم.



برای رسم $y=f(-\frac{x}{۲})$ باید در نمودار $y=f(x)$، طول نقاط را بر $-\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم (در -۲ ضرب کنیم).

-متوسط

۵. باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow$ باقی‌مانده $r=f(-۲)=(-۲)^۳+(-۲)^۲-۶$

$\Rightarrow f(-۲)=-۸+۴-۶=-۱۰ \Rightarrow$ باقی‌مانده $=-۱۰$

-آسان

۶. باتوجه به اینکه مقسوم‌علیه دو ریشهٔ متمایز دارد، رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم و از ریشه‌های مقسوم‌علیه در این رابطه استفاده می‌کنیم.

$$x^۴-۳x^۳+mx+n=(x^۲-۵x+۶)q(x)+۰$$
$$x^۴-۳x^۳+mx+n=(x-۲)(x-۳)q(x)$$
$$x=۲ \Rightarrow ۱۶-۲۴+۲m+n=۰ \Rightarrow ۲m+n=۸$$
$$x=۳ \Rightarrow ۸۱-۸۱+۳m+n=۰ \Rightarrow ۳m+n=۰$$
$$-\begin{cases} ۲m+n=۸ \\ ۳m+n=۰ \end{cases}$$
$$m=-۸ \Rightarrow n=-۳m \Rightarrow n=۲۴$$

-متوسط

.۷

$f(x)=x^{۳}+mx-n$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow$ باقی‌مانده $=f(۱)=۰ \Rightarrow ۱+m-n=۰ \Rightarrow m-n=-۱$

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow$ باقی‌مانده $=f(-۲)=-۳$

$\Rightarrow -۸-۲m-n=-۳ \Rightarrow ۲m+n=-۵$

$$\begin{cases} m-n=-۱ \\ ۲m+n=-۵ \end{cases}$$

$۳m=-۶ \Rightarrow m=-۲ \Rightarrow -۲-n=-۱ \Rightarrow n=-۱$

-متوسط

.۸ نکته: $\cos u=\cos v \Rightarrow u=۲k\pi \pm v$, $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$

$$\sin(\frac{x}{۲})+\cos(\frac{x}{۲})=۰ \Rightarrow \cos(\frac{x}{۲})=-\sin(\frac{x}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲})$$

$$\frac{x}{۲}=۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲} \Rightarrow ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}=۰ & \text{نادرست} \\ \frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} & \text{جواب} \end{cases}$$

جوابهای واقع در بازه $[۰,۲\pi]$ $\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲}$

-متوسط

.۹ در تابع‌های $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \ , \ max=|a|+c \ , \ min=-|a|+c$$

الف) $f(x)=\sqrt{۳}\sin(۲\pi x)-۱ \to T=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$

$$max\ f=|\sqrt{۳}|-۱=\sqrt{۳}-۱ \ , \ min\ f=-|\sqrt{۳}|-۱=-\sqrt{۳}-۱$$

ب) $g(x)=\pi\cos(\frac{\pi}{۲}x)+\frac{\pi}{۲} \to T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$

$$max\ g=|\pi|+\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۲} \ , \ min\ g=-|\pi|+\frac{\pi}{۲}=-\frac{\pi}{۲}$$

-متوسط

.۱۰ نکته: $\tan u=\tan v \Rightarrow u=ku+v$

نکته: $\cos u=\cos v \Rightarrow u=۲k\pm v$

الف) $\tan x=۳\cot x \xrightarrow{\times \tan x} \tan^{۲} x=۳\cot x\tan x=۳ \Rightarrow \tan x=\pm\sqrt{۳}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{۳} = \tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ \tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow x = ku \pm \frac{\pi}{۳}$$

ب) $۲\sin^۲ x = ۳\cos x \Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x) = ۳\cos x \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x = ۳\cos x$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰ \ , \ \cos x = t \Rightarrow ۲t^۲ + ۳t - ۲ = ۰ \ , \ \Delta = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$

$$t = \frac{-۳ \pm ۵}{۴} \begin{cases} t = -۲ \Rightarrow \cos x = -۲ \ \text{غ ق ق} \\ t = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

-متوسط

.۱۱

می دانیم: $f(x) = a\cos bx + c$ و $f(x) = a\sin bx + c \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|}$

$$f(x) = ۳\cos(mx) + ۴ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{m} = \frac{\pi}{۵} \Rightarrow m = ۱۰$$

$$\Rightarrow g(x) = -\cos ۱۲x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}$$

-متوسط

.۱۲

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۱۰ & x + ۲ \\ \cline{2-2} -(۲x^۳ + ۴x^۲) & ۲x^۲ + x - ۵ \\ \hline x^۲ - ۳x - ۱۰ & \\ -(x^۲ + ۲x) & \\ \hline -۵x - ۱۰ & \\ -(-۵x - ۱۰) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

چون باقی‌مانده تقسیم برابر صفر شده در نتیجه $f(x)$ بر $(x+۲)$ بخش‌پذیر است.

-آسان

.۱۳ الف)

$$f(x) = \frac{-x^۳ + x}{+۴x^۲ + x^۳} \quad \text{یا} \quad f(x) = \frac{۱ - ۵x^۵}{۵x^۵ - x^۴ + ۳}$$

ب)

$$f(x) = \frac{-۱۰۰۰x - ۱}{۳ - ۱۰x} \quad \text{یا} \quad f(x) = \frac{۵ - ۳x + ۱۰۰x^۳}{x^۳ - x^۲ + ۳}$$

-آسان

.۱۴

با توجه به شکل داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$

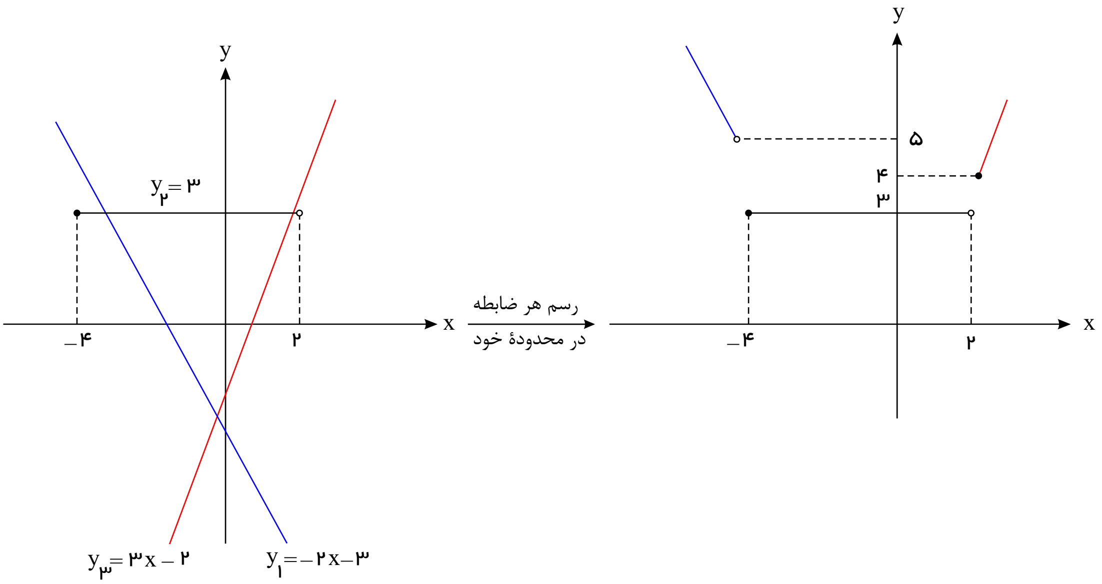
ت) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

-آسان

.۱۵ رسم نمودار تابع f به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:



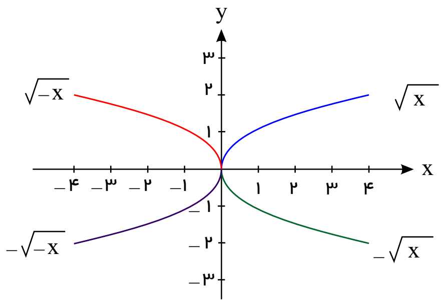
می‌بینیم که این نمودار در بازهٔ $(-\infty, -4)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-4, 2)$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصلهٔ $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. براین اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصلهٔ $(-\infty, 2)$ نزولی و در فاصلهٔ $[-4, +\infty)$ صعودی است.

-سخت

.۱۶ هر تابع به فرم کلی $y = x^{2n+1} + b$ روی دامنهٔ خود (یعنی $Df = \mathbb{R}$) اکیداً صعودی و هر تابع به فرم کلی $y = -x^{2n+1} + b$ روی دامنهٔ خود اکیداً نزولی است. مثلاً تابع‌های $y = x^3$، $y = x^3 - 1$ و $y = 2x^3 + 3$ همگی صعودی اکید و تابع‌های $y = -x^3$، $y = -2x^3 + 1$ و $y = 5 - \frac{1}{2}x^3$ همگی نزولی اکید هستند. حتی می‌توان موضوع را ساده‌تر هم بیان کرد. هر تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ با شرط $a > 0$ صعودی اکید و با شرط $a < 0$ نزولی اکید می‌باشد.

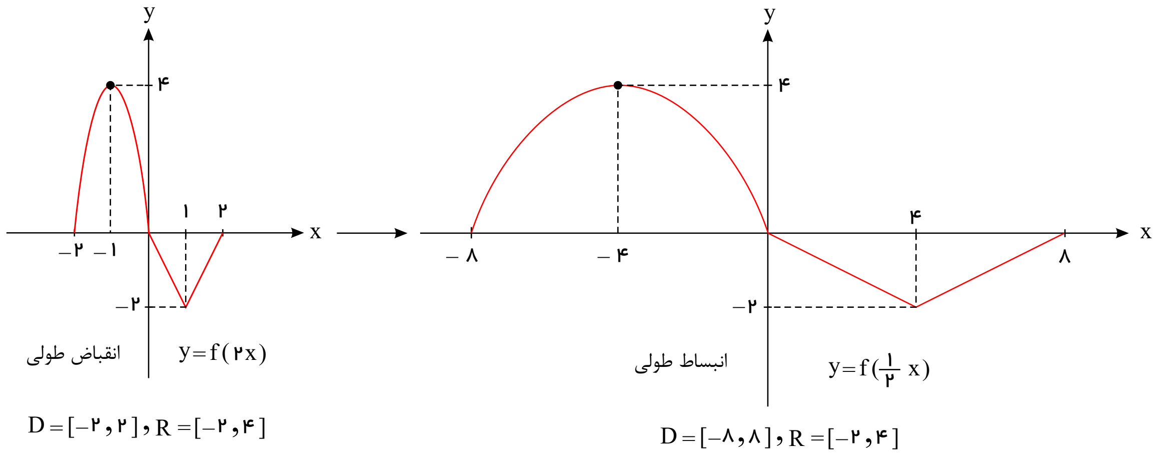
-متوسط

.۱۷ تابع $y = \sqrt{x}$ با برد $R = [0, +\infty)$ بر روی فاصلهٔ (دامنهٔ) $D = [0, +\infty)$ قابل تعریف بوده و از نمودارها پیداست که هریک از توابع $y = \sqrt{-x}$، $y = -\sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{-x}$ به ترتیب در فاصله‌های (دامنهٔ) $(-\infty, 0]$، $[0, +\infty)$ و $(-\infty, 0]$ معین هستند. از همین نمودارها معلوم است که برد $y = \sqrt{-x}$ به صورت $[0, +\infty)$ و برد $y = -\sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{-x}$ به صورت $(-\infty, 0]$ می‌باشد.



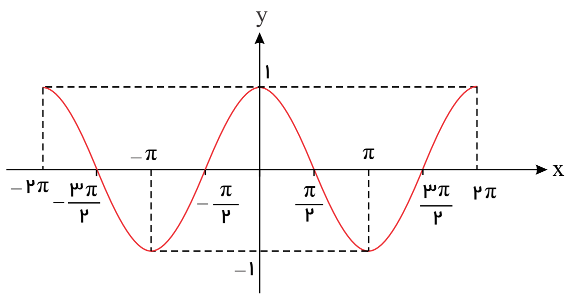
-سخت

۱۸. باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار $y=f(x)$ کافی است طول هر نقطه از $f(x)$ را $\frac{۱}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت می‌توانیم بگوییم که نمودار تابع $y=f(x)$، برای kهای بزرگتر از یک ($k>۱$) با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای kهای بین ۰ و ۱ ($۰<k<۱$) با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.



-خیلی سخت

۱۹. ابتدا به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دورهٔ تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار **(۴)** مربوط به تابع (الف)، نمودار **(۱)** مربوط به تابع (ب)، نمودار **(۲)** متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار **(۳)** متعلق به تابع (ت) می‌باشد.

الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x) \rightarrow$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را -۲ برابر و عرض آن‌ها را $\frac{-۱}{۲}$ برابرمی‌کنیم.

ب) $y=۲\cos ۲x \rightarrow$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را $\frac{۱}{۲}$ برابر و عرض آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم.

پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x) \rightarrow$ با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد.

ت) $y=-\cos ۲x \rightarrow$ طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می‌کنیم.

-خیلی سخت

۲۰. با توجه به جدول زیر و این نکته که «اگر $(a,b)\in f$ آن‌گاه $(b,a)\in f^{-۱}$ و بالعکس» می‌توان نوشت:

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	α	β	γ	λ

$(-۴,\alpha)\in f^{-۱}\rightarrow(\alpha,-۴)\in f$

از نمودار f پیداست که نقطه با عرض -۴ دارای طول -۳ است و لذا $\alpha=-۳$

$(-۲,\beta)\in f^{-۱}\rightarrow(\beta,-۲)\in f$

از نمودار f پیداست که نقطه با عرض -۲ طولی برابر -۱ داشته و لذا $\beta=-۱$

$(۲,\gamma)\in f^{-۱}\rightarrow(\gamma,۲)\in f$

از نمودار f پیداست که نقطه‌ای با عرض ۲ طولی برابر ۱ دارد و لذا $\gamma=۱$

$(۳,\gamma)\in f^{-۱}\rightarrow(\gamma,۳)\in f \xrightarrow[(۳,۳)\in f]{\text{از نمودار } f \text{ می‌بینیم}} \gamma=۳$

-متوسط